共通回帰ベクトルの推定方程式について

井　上　　　淳

1. はじめに

均質でない k 組 ($k \geq 2$) の情報源からそれぞれサイズ n_i ($n_i \geq 2$) のデータ $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in_i})^t$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を入手し，それらが従う確率分布族が共通に含んでいる未知母数ベクトル β $(p \times 1)$ の推定を行いたいことがある．

例えば，ある一次元の物理量 β を幾つかの異なる測定方法で観測し，得られたデータの情報を統合して β に関する推測を行うことが考えられる．この場合，観測対象となる物理量は測定方法にかかわらず一定（共通）である．しかし，データが従う確率分布も測定方法にかかわらず一定と想定することは一般にはできない．

データが従う確率分布が k 組の情報源ごとに異なるという状況下で β を推定する問題としてよく取り扱われるのは，次のようなモデルである．

$$y_i \ \sim \ \mathrm{N}\left(\beta 1_i, \ \sigma_i^2 I_i \right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.1}$$

(β : (1×1)，I_i : n_i 次単位行列，$1_i = (1, 1, \ldots, 1)^t \, (n_i \times 1)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$)

モデル (1.1) は k 個の分散 σ_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を局外母数に持ち，β を共通の位置母数とする正規分布型のモデルである．このモデルの枠内で β に関する点推定や区間推定を行う問題については，従来から多くの議論がなされている．

Shinozaki (1978) は，k 組の標本平均 $\overline{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} / n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の結合推定量 (β の点推定量) の分散が $\overline{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ のそれよりも小さくなるための必要十分条件を与えている．井上 (2005) はモデル (1.1) を (正規分布を特殊例として含む) 一般のモデルに拡張し，Shinozaki (1978) が与えた必要十分条件が単に正規分布の枠内に留まるものではないことを示している．具体

的には，k 組のデータが従う分布が楕円型分布（分布型は k 組を通じて一定でないことを許す）の場合を考え，Shinozaki (1978) と同様の必要十分条件を導出している．但し，Shinozaki (1978)，井上 (2005) ともに β の結合推定量の分散自体を定量的に与えている訳ではなく，あくまでも個別の標本平均と結合推定量の分散の比較に基づいた結果のみを導出していることに注意しておく．これは，$k < +\infty$ かつ $\max_{1 \le i \le k} n_i < +\infty$ の場合（即ち，有限標本の場合）に β の結合推定量の分散を陽に評価することができないという事実に起因する．

モデル (1.1) において，$n_i \to +\infty$ を満たす $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ が存在する場合，$V(\overline{y}_i) \to 0$ が成り立つので標本平均 $\overline{y}_i$ は β を精確に推定する．従って，このような場合は考察の対象から外してよい．一方で，($\max_{1 \le i \le k} n_i < +\infty$ かつ) $k \to +\infty$ の場合は (局外母数 σ_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が無限に増えていき，なおかつ $\overline{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が β の一致推定量でないという意味で) 上記の状況とは異なっており，考察の対象とすることができる．Inoue (1999) は $\overline{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を結合して得られる不偏推定量のクラスを考え，そのクラスに属する推定量の漸近分散 ($k \to +\infty$) を明示的に与えた．そして，漸近最適（漸近分散が最小）なものをそのクラスの中から選んだうえで，それよりも漸近分散が小さい推定量をそのクラス外から見つけ出している．

Neyman and Scott (1948) はモデル (1.1) において，β の尤度方程式

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i 1_i^t (y_i - \beta 1_i)}{|| \, y_i - \beta 1_i \, ||^2} = 0$$

の分子に定数 w_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を付加して得られる β の推定方程式

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i w_i 1_i^t (y_i - \beta 1_i)}{|| \, y_i - \beta 1_i \, ||^2} = 0$$

を考えた．そして，$w_i \propto (n_i - 2)/n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ と選択したときの推定方程式の解が，尤度方程式の解（最尤推定量）よりも（漸近分散 ($k \to +\infty$) が小さいという意味で）優れていることを示した（但し，$n_1 = n_2 = \cdots = n_k$ の場合，両者は同等である）．なお，$w_i \propto (n_i - 2)/n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ に対応する

推定方程式の解には，明示的に表現されえないという短所があるものの，その漸近分散は Shinozaki (1978) が提案した不偏推定量及び Inoue (1999) が提案した推定量の漸近分散よりも小さいという長所が認められる．

本論文ではモデル (1.1) を次のように拡張し，未知の回帰ベクトル $\beta\ (p \times 1)$ の推定方程式の解の漸近的な性質を調べる．

$$y_i = X_i\beta + \epsilon_i \sim EC_{n_i}\left(X_i\beta,\ \sigma_i^2\Omega_i\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.2}$$

但し，$y_i\ (n_i \times 1)\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ は互いに独立，$X_i\ (n_i \times p)\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ は第 1 列が 1_i, 階数が p の既知計画行列, $\sigma_i^2\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ は未知正定数, $\Omega_i = (1-\rho_i)I_i + \rho_i 1_i 1_i^t$ (ρ_i : 既知定数)$(i = 1, 2, \ldots, k)$ とする．また，記号 $EC_m\,(\mu,\ \Sigma)$ は平均が μ, 分散共分散行列が Σ の楕円型分布を表すものとする．

モデル (1.2) で，誤差項に無相関性を仮定した場合（すなわち，$\Omega_i = I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ と仮定した場合）における β の推定方程式の解については，Inoue (2003) が幾つかの漸近的な結果を導いている．無相関性の仮定 $\Omega_i = I_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ に加えて，$p = 1$, $X_i = 1_i$，$\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_i^2 I_i)\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ を仮定すれば，モデル (1.2) は Neyman and Scott (1948) が用いたモデル (1.1) になる．すなわち，モデル (1.2) は Neyman and Scott (1948) や Inoue (2003) が考察の対象としたモデルを一般化したものである．

2. 推定方程式

β の推定量 $\widehat{\beta}_c$ ($c \geq 0$) を用いて σ_i^2 の推定量

$$s_{ic} = \frac{1}{n_i} \|\, y_i - X_i\,\widehat{\beta}_c\, \|^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

を作り，これらを用いて β の推定量 $\widehat{\beta}_{c+1}$ を新たに作ることを考える：

$$\widehat{\beta}_{c+1} = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i^t s_{ic}^{-1} W_i \Omega_i^{-1} X_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} X_i^t s_{ic}^{-1} W_i \Omega_i^{-1} y_i \tag{2.1}$$

但し，$W_i\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ は n_i 次定数行列とする．(2.1) 式から分かるように，推定量列 $\{\widehat{\beta}_c\}_{c\geq 0}$ は重み付き最小二乗推定量の列として定義される．

(2.1) 式は

$$\sum_{i=1}^{k} s_{ic}^{-1} X_i^t W_i \Omega_i^{-1} \left(y_i - X_i \widehat{\beta}_{c+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i X_i^t W_i \Omega_i^{-1} \left(y_i - X_i \widehat{\beta}_{c+1}\right)}{||\ y_i - X_i\, \widehat{\beta}_c\ ||^2} = 0$$

と変形される．これにより，推定量列 $\{\,\widehat{\beta}_c\,\}_{c\geq 0}$ がベクトル γ_k に収束するならば γ_k は次の推定方程式を満たすことが分かる．

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i X_i^t W_i \Omega_i^{-1} \left(y_i - X_i \gamma_k\right)}{||\ y_i - X_i\, \gamma_k\ ||^2} = 0 \tag{2.2}$$

ここで，$\Psi_i(\gamma_k) = n_i ||\ y_i - X_i\, \gamma_k\ ||^{-2} X_i^t W_i \Omega_i^{-1} \left(y_i - X_i \gamma_k\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とおき，(2.2) 式の左辺 $\sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\gamma_k)$ を $\gamma_k = \beta$ の周りで展開すると

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\gamma_k) \;\simeq\; \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) + \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}\Psi_i(\beta) \right\} (\gamma_k - \beta) \tag{2.3}$$

となる．但し，$\mathrm{D}\Psi_i(\beta)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\gamma_k = \beta$ における $\Psi_i(\gamma_k)$ のヤコビアンを表すものとする．(2.3) 式より次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \gamma_k - \beta \;&\simeq\; -\left\{ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}\Psi_i(\beta) \right\}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) \\ &=\; \left[-\sum_{i=1}^{k} E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\} \right]^{-1} \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) \;+\; o_p(k^{-1/2}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) 式を用いれば，推定方程式 (2.2) の解 γ_k の漸近的性質を調べることができる．そのために先ず幾つかの記号・仮定を準備し，その後に (2.4) の右辺の性質について述べることにする．

定義 2.1 $1_i/\sqrt{n_i}$ を第 1 列に持つ n_i 次直交行列を T_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とし，$a,\, b$ を実数とする．この時，n_i 次正方行列 $M_i(a,\, b)$ を次式で定める．

$$\begin{aligned} M_i(a,\, b) \;&=\; T_i \times diag(a, b, \ldots, b) \times T_i^t \\ &=\; bI_i + \left(\frac{a-b}{n_i}\right) 1_i 1_i^t \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}$$

■

この定義を用いて Ω_i を表すと $\Omega_i \;=\; M_i\left(1 + (n_i - 1)\rho_i,\, 1 - \rho_i\right)$ となる．

定義 2.2 変換 $f_i = T_i^t \Omega_i^{-1/2} \epsilon_i$ によってベクトル $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{in_i})^t$ ($\sim EC_{n_i}\left(0,\ \sigma_i^2 I_i\right)$) $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を定め，定数 a_i, b_i を次式によって定める．

$$a_i \;=\; E\left(f_{i1}^2 || \epsilon_i ||^{-4}\right), \quad b_i \;=\; E\left(f_{i2}^2 || \epsilon_i ||^{-4}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

また，定数 q_i, r_i を次式によって定める．

$$\begin{aligned} q_i &= E\left(|| \epsilon_i ||^{-2}\right)/a_i \;=\; E\left(|| \epsilon_i ||^{-2}\right)/E\left(f_{i1}^2 || \epsilon_i ||^{-4}\right) \\ r_i &= E\left(|| \epsilon_i ||^{-2}\right)/b_i \;=\; E\left(|| \epsilon_i ||^{-2}\right)/E\left(f_{i2}^2 || \epsilon_i ||^{-4}\right) \end{aligned}$$

■

f_i の分布の対称性から $b_i = E\left(f_{ij}^2 || \epsilon_i ||^{-4}\right)$ $(j = 2, 3, \ldots, n_i)$ が成り立つ．また，$|| \epsilon_i ||^2 = \{1 + (n_i - 1)\rho_i\} f_{i1}^2 + (1 - \rho_i) \sum_{j=2}^{n_i} f_{ij}^2$ であることから次が成り立つ．

$$\begin{aligned} E\left(|| \epsilon_i ||^{-2}\right) &= \{1 + (n_i - 1)\rho_i\} a_i + (1 - \rho_i)(n_i - 1) b_i \\ &= \xi_i a_i + \nu_i (n_i - 1) b_i \end{aligned} \tag{2.5}$$

但し，$\xi_i = 1 + (n_i - 1)\rho_i$, $\nu_i = 1 - \rho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

定義 2.3 A_i を n_i 次正方行列とする $(i = 1, 2, \ldots, k)$．この時，$\sum_{i=1}^k n_i$ 次正方行列 $[\,A_i\,]$ を次式で定める．

$$[\,A_i\,] \;=\; block\,diag\,(A_1, A_2, \ldots, A_k)$$

■

条件 2.4 X_i, σ_i^2, n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ に次の条件を課す．

(i) $c_0 I_p \;\le\; k^{-1} \sum_{i=1}^{k} X_i^t X_i \;\le\; c_1 I_p$ (c_0, c_1: 正定数) $(i = 1, 2, \ldots, k)$

(ii) $s_0 \le \sigma_i^2 \le s_1$ (s_0, s_1: 正定数) $(i = 1, 2, \ldots, k)$

(iii) $s + 2 < n_i \le n_0$ (n_0, $s\,(0 < s \le 4)$: 正定数) $(i = 1, 2, \ldots, k)$

■

条件 2.5　重み行列 W_i $(i=1,2,\ldots,k)$ に次の条件を課す.

(i)　$w_0 I_i \le W_i \le w_1 I_i$　($w_0,\, w_1$: 正定数)　$(i=1,2,\ldots,k)$

(ii)　$W_i = T_i H_i T_i^t$ (H_i: 対角行列)　$(i=1,2,\ldots,k)_{07}$

∎

条件 2.6　相関係数 ρ_i $(i=1,2,\ldots,k)$ に次の条件を課す.

$$\frac{-1}{n_i-1}\left\{1-\frac{n_i(n_i-1-s)}{(n_i-1)^2+(n_i-1-s)}\right\} \le \rho_i \le 1-\frac{m_i(t)n_i}{m_i(t)(n_i-1)+1} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

但し，$0<s,\, t\le 4$，$m_i(t)=\left(1-\dfrac{t}{n_i-1}\right)^{1/3}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ とする.

∎

条件 2.7　誤差ベクトル ϵ_i $(i=1,2,\ldots,k)$ に次の条件を課す.

$$\sup_{i\ge 1} E(\,||\,\epsilon_i\,||^{-\delta}\,)\ <\ +\infty \qquad (\,\delta\ >\ 2\,)$$

∎

補助定理 2.8　q_i/ξ_i $(i=1,2,\ldots,k)$ に関して次の (i), (ii) が成り立つ.

(i)　$\rho_i<0$ の時,

$$n_i-s\ \le\ \frac{q_i}{\xi_i}\ \le\ 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1}{n_i-1-s}\right)^3 \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

(ii)　$\rho_i\ge 0$ の時,

$$n_i-t\ \le\ \frac{q_i}{\xi_i}\ \le\ 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1}{n_i-1-t}\right)^{1/3} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

(i) の証明　$g(\rho_i)=\xi_i/\nu_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ とおくと，$g'(\rho_i)=n_i/(1-\rho_i)^2>0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ より

$$g(\rho_i)\quad\ge\quad g\left(\frac{-1}{n_i-1}\left\{1-\frac{n_i(n_i-1-s)}{(n_i-1)^2+(n_i-1-s)}\right\}\right)\ =\ 1-\frac{s}{n_i-1}\,,$$

すなわち，次が成り立つ.

$$\frac{\xi_i}{\nu_i}\ \ge\ \frac{n_i-1-s}{n_i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2.6}$$

また，$\dfrac{1}{n_i\nu_i} \le \nu_i b_i/E\left(\|f_i\|^{-2}\right) \le \dfrac{\nu_i}{n_i\xi_i^2}$，$\dfrac{\xi_i}{n_i\nu_i^2} \le \xi_i a_i/E\left(\|f_i\|^{-2}\right) \le \dfrac{1}{n_i\xi_i}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ より次が成り立つ.

$$\frac{\xi_i}{\nu_i} \;\le\; \frac{\nu_i b_i}{\xi_i a_i} \;\le\; \left(\frac{\nu_i}{\xi_i}\right)^3 \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2.7}$$

(2.5), (2.6), (2.7) により次を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{q_i}{\xi_i} &= 1+(n_i-1)\frac{\nu_i b_i}{\xi_i a_i} \;\ge\; 1+(n_i-1)\frac{\xi_i}{\nu_i} \\
&\ge 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1-s}{n_i-1}\right) \;=\; n_i-s\,, \\
\frac{q_i}{\xi_i} &\le 1+(n_i-1)\left(\frac{\nu_i}{\xi_i}\right)^3 \;\le\; 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1}{n_i-1-s}\right)^3 \\
&\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,k).
\end{aligned}$$

(ii) の証明　$h(\rho_i)=(\nu_i/\xi_i)^3$ $(i=1,2,\ldots,k)$ とおくと，

$h'(\rho_i)=-3n_i\xi_i^{-2}(\nu_i/\xi_i)^2<0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ より

$$h(\rho_i) \;\ge\; h\left(1-\frac{m_i(t)n_i}{m_i(t)(n_i-1)+1}\right) \;=\; 1-\frac{t}{n_i-1}\,,$$

すなわち，次が成り立つ.

$$\left(\frac{\nu_i}{\xi_i}\right)^3 \;\ge\; \frac{n_i-1-t}{n_i-1} \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2.8}$$

また，$\dfrac{\nu_i}{n_i\xi_i^2} \le \nu_i b_i/E\left(\|f_i\|^{-2}\right) \le \dfrac{1}{n_i\nu_i}$，$\dfrac{1}{n_i\xi_i} \le \xi_i a_i/E\left(\|f_i\|^{-2}\right) \le \dfrac{\xi_i}{n_i\nu_i^2}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ より次が成り立つ.

$$\left(\frac{\nu_i}{\xi_i}\right)^3 \;\le\; \frac{\nu_i b_i}{\xi_i a_i} \;\le\; \frac{\xi_i}{\nu_i} \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2.9}$$

(2.5), (2.8), (2.9) により次を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{q_i}{\xi_i} &= 1+(n_i-1)\frac{\nu_i b_i}{\xi_i a_i} \;\ge\; 1+(n_i-1)\left(\frac{\nu_i}{\xi_i}\right)^3 \\
&\ge 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1-t}{n_i-1}\right) \;=\; n_i-t\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{q_i}{\xi_i} \;\leq\; 1+(n_i-1)\frac{\xi_i}{\nu_i} \;\leq\; 1+(n_i-1)\left(\frac{n_i-1}{n_i-1-t}\right)^{1/3} \quad (i=1,2,\ldots,k).$$

∎

補助定理 2.9 条件 2.6 において $1 \leq s = t \leq 4$ とする．この時，次の (i), (ii) が成り立つ.

$$\text{(i)} \quad \min\{a_i(q_i-2\xi_i),\ b_i(r_i-2\nu_i)\} \;\geq\; \frac{n_i-s-2}{n_i-s}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$\text{(ii)} \quad \min\left\{\frac{a_i(q_i-2\xi_i)^2}{\xi_i},\ \frac{b_i(r_i-2\nu_i)^2}{\nu_i}\right\} \geq \frac{(n_i-s-2)^2}{n_i-s}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

(i) の証明　補助定理 2.8 により次が成り立つ.

$$\begin{aligned} a_i(q_i-2\xi_i) &= q_i^{-1}(q_i-2\xi_i)E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \;=\; \{1-2(\xi_i/q_i)\}\,E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \\ &\geq \left(1-\frac{2}{n_i-s}\right)E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \quad (i=1,2,\ldots,k) \end{aligned}$$

次に，$b_i(r_i-2\nu_i)$ について考える.

$$\frac{\sum_{j=2}^{n_i} f_{ij}^2}{||\,\epsilon_i\,||^4} \;=\; \frac{\nu_i\sum_{j=2}^{n_i} f_{ij}^2}{||\,\epsilon_i\,||^2} \times \frac{\nu_i^{-1}}{||\,\epsilon_i\,||^2} \;\leq\; \nu_i^{-1}||\,\epsilon_i\,||^{-2}$$

より　$(n_i-1)b_i = \sum_{j=2}^{n_i} E\left(f_{ij}^2||\,\epsilon_i\,||^{-4}\right) \leq \nu_i^{-1}E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right)$，すなわち

$$\nu_i b_i \;\leq\; \frac{1}{n_i-1}E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right) \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2.10}$$

が成り立つ．これより次を得る.

$$\begin{aligned} b_i(r_i-2\nu_i) &= E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})-2\nu_i b_i \;\geq\; \left(1-\frac{2}{n_i-1}\right)E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \\ &\geq \left(1-\frac{2}{n_i-s}\right)E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \quad (i=1,2,\ldots,k) \end{aligned} \tag{2.11}$$

(ii) の証明　(2.10) より

$$\frac{r_i}{\nu_i} \;=\; \frac{E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})}{\nu_i b_i} \;\geq\; n_i-1 \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

が成り立つ．このことと (2.11) により次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{b_i(r_i-2\nu_i)^2}{\nu_i} &= b_i(r_i-2\nu_i)\times\{(r_i/\nu_i)-2\}\\ &\geq \left(1-\frac{2}{n_i-1}\right)E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})\times(n_i-3)\\ &= \frac{(n_i-3)^2}{n_i-1}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \;\geq\; \frac{(n_i-s-2)^2}{n_i-s}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})\end{aligned}$$

また，(i) と補助定理 2.8 により次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{a_i(q_i-2\xi_i)^2}{\xi_i} &= a_i(q_i-2\xi_i)\times\{(q_i/\xi_i)-2\}\\ &\geq \frac{n_i-s-2}{n_i-s}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})\times(n_i-s-2)\\ &= \frac{(n_i-s-2)^2}{n_i-s}E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})\end{aligned}$$

∎

補助定理 2.10　次が成り立つ．

$$\left[-\sum_{i=1}^{k}E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\}\right]^{-1} = O(k^{-1})$$

証明　先ず $\mathrm{D}\Psi_i(\beta)$ を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\Psi_i(\beta) &= \frac{n_iX_i^tW_i\Omega_i^{-1}\left(||\,\epsilon_i\,||^2I_{n_i}-2\epsilon_i\epsilon_i^t\right)}{||\,\epsilon_i\,||^4}\times(-X_i)\\ &= n_iX_i^tW_i\Omega_i^{-1}\left(-\frac{1}{||\,\epsilon_i\,||^2}I_{n_i}+\frac{2\epsilon_i\epsilon_i^t}{||\,\epsilon_i\,||^4}\right)X_i \qquad (2.12)\end{aligned}$$

次に，(2.12) の期待値を計算するために，$\epsilon_i\epsilon_i^t||\,\epsilon_i\,||^{-4}$ の期待値を変形しておく．$E\left(f_{ij}f_{im}||\,\epsilon_i\,||^{-4}\right)=0\ \ (j\neq m)$ であることにより，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}E\left(\frac{\epsilon_i\epsilon_i^t}{||\,\epsilon_i\,||^4}\right) &= \Omega_i^{1/2}T_i\times E\left(\frac{f_if_i^t}{\xi_if_{i1}^2+\nu_i\sum_{j=2}^{n_i}f_{ij}^2}\right)\times T_i^t\Omega_i^{1/2}\\ &= \Omega_i^{1/2}T_i\times diag(a_i,b_i,\ldots,b_i)\times T_i^t\Omega_i^{1/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Omega_i^{1/2} M_i\,(a_i,\, b_i)\, \Omega_i^{1/2} \\
&= M_i\left(\sqrt{\xi_i},\, \sqrt{\nu_i}\right) M_i\,(a_i,\, b_i)\, M_i\left(\sqrt{\xi_i},\, \sqrt{\nu_i}\right) \\
&= M_i\,(a_i\xi_i,\, b_i\nu_i)\ . \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

(2.13) により，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&-E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right) I_{n_i} + 2E\left(\frac{\epsilon_i\epsilon_i^t}{||\,\epsilon_i\,||^4}\right) \\
&\quad = -M_i\left(\,E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right),\, E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right)\,\right) \ +\ M_i\,(2a_i\xi_i,\, 2b_i\nu_i) \\
&\quad = M_i\left(\,2a_i\xi_i - E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right),\ 2b_i\nu_i - E\left(||\,\epsilon_i\,||^{-2}\right)\,\right) \\
&\quad = M_i\,(\,a_i(2\xi_i - q_i),\, b_i(2\nu_i - r_i)\,) \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

(2.12), (2.14) により次を得る．

$$
-\sum_{i=1}^{k} E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\} = \sum_{i=1}^{k} n_i X_i^t W_i \Omega_i^{-1} M_i\,(\,a_i(q_i - 2\xi_i),\, b_i(r_i - 2\nu_i)\,)\, X_i \qquad (2.15)
$$

ここで，$E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \geq \left\{\,E(||\,\epsilon_i\,||^2)\,\right\}^{-1} = \left(\,n_i\sigma_i^2\,\right)^{-1}$ であること，及び補助定理 2.9 (i) により次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&W_i\Omega_i^{-1} M_i\,(\,a_i(q_i - 2\xi_i),\, b_i(r_i - 2\nu_i)\,) \\
&\quad = T_i H_i T_i^t \times M_i\,(\,a_i(q_i - 2\xi_i)/\xi_i,\, b_i(r_i - 2\nu_i)/\nu_i\,) \\
&\quad = T_i\ \mathrm{diag}\left\{h_{i1}\frac{a_i(q_i - 2\xi_i)}{\xi_i},\, h_{i2}\frac{b_i(r_i - 2\nu_i)}{\nu_i}, \ldots, h_{in_i}\frac{b_i(r_i - 2\nu_i)}{\nu_i}\right\} T_i^t \\
&\quad \geq \left(\frac{n_i - s - 2}{n_i - s}\right) E(||\,\epsilon_i\,||^{-2}) \times W_i\Omega_i^{-1} \\
&\quad \geq \left(\frac{n_i - s - 2}{n_i - s}\right) \times \frac{w_0}{n_i\sigma_i^2} \times \Omega_i^{-1} \ \geq\ d_1 I_i \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

但し，$H_i = \mathrm{diag}\,(h_{i1}, h_{i2}, \ldots, h_{in_i})$ とおき，d_1 は適当な正数とする．

(2.15), (2.16) により

$$
-\sum_{i=1}^{k} E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\} \ \geq\ d_2 \sum_{i=1}^{k} X_i^t X_i \ \geq\ c_0 d_2\, k I_p\,,
$$

すなわち

$$\left[-\sum_{i=1}^{k} E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\}\right]^{-1} \;\leq\; (c_0 d_2)^{-1} \times k^{-1} I_p$$

が成り立つ．但し，d_2 は適当な正数とする．以上により補助定理 2.10 の主張が示された.

$\blacksquare$

補助定理 2.11　$\sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta)$ の漸近分布について，次が成り立つ.

$$V_w^{-1/2} U_{1w}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) \quad \xrightarrow{d} \quad N(0, I_p) \quad (k \to +\infty)$$

但し，$V_w = U_{1w}^{-1} U_{2w} U_{1w}^{-1}$，$U_{1w} = -\sum_{i=1}^{k} E\left\{\mathrm{D}\Psi_i(\beta)\right\}$，$U_{2w} = V\left\{\sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta)\right\}$ とおく.

証明　ι を任意の p 次単位ベクトルとし，$\iota_k^t = \iota^t V_w^{-1/2} U_{1w}^{-1}$，

$$\iota_k^t \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) = \sum_{i=1}^{k} n_i \iota_k^t X_i^t W_i \Omega_i^{-1} ||\, \epsilon_i \,||^{-2} \epsilon_i$$

とおく．そして，確率ベクトル列 $\left\{ n_i \iota_k^t X_i^t W_i \Omega_i^{-1} ||\, \epsilon_i \,||^{-2} \epsilon_i \right\}_{i=1}^{k}$ に中心極限定理を適用することを以下で考える.

以下，d_j $(j \geq 1)$ は適当に定められる正数とする．先ず次が成り立つことを示す.

$$U_{2w}^{-1} \quad = \quad \left(X^t W C W X\right)^{-1} \quad \leq \quad d_1 k^{-1} I_p \qquad (2.17)$$

但し，$W = [\, W_i \,]$，$C = [\, C_i \,] = \left[\, n_i^2\, M_i(a_i \xi_i^{-1}, b_i \nu_i^{-1}) \,\right]$，$X = \left(X_1^t, X_2^t, \ldots, X_k^t\right)^t$ とする.

$$\begin{aligned}
W_i C_i W_i \quad &= \quad n_i^2\, T_i \,\mathrm{diag}\left(h_{i1}^2 a_i \xi_i^{-1},\, h_{i2}^2 b_i \nu_i^{-1},\, \ldots\,, h_{in_i}^2 b_i \nu_i^{-1}\right) T_i^t \\
&\geq \quad n_i^2 w_0^2 \times M_i(\, a_i \xi_i^{-1}, b_i \nu_i^{-1}) \\
&\geq \quad n_i^2 w_0^2 \times n_i^{-2} \sigma_i^{-2} \min\left(\xi_i^{-2},\, \nu_i^{-2}\right) \times M_i(\xi_i^{-1}, \nu_i^{-1}) \\
&\geq \quad w_0^2 \sigma_i^{-2} \times \min\left(\xi_i^{-3},\, \nu_i^{-3}\right) I_i \;\geq\; d_2 I_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)
\end{aligned}$$

が成り立つことにより，$U_{2w} = X^tWCWX \geq d_2\, X^tX \geq d_2c_0\, kI_p$，すなわち (2.17) が成り立つ.

次に，

$$||\,\iota_k\,|| \;=\; O(k^{-1/2}) \tag{2.18}$$

が成り立つことを示す.

いま，$B = [\,B_i\,] = \left[\,n_i\Omega_i^{-1}M_i(a_i(q_i-2\xi_i),\, b_i(r_i-2\nu_i))\right]$ とおくと，

$$\begin{aligned} B_i &\leq n_i \times \max\left(\xi_i^{-1},\, \nu_i^{-1}\right) \times M_i(a_i(q_i-2\xi_i),\, b_i(r_i-2\nu_i)) \\ &\leq \max\left(n_i\nu_i^{-2}-2\xi_i^{-2},\; n_i\xi_i^{-2}-2\nu_i^{-2}\right)E(||\,f_i\,||^{-2})I_i \\ &\leq d_3I_i \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$U_{1w} = X^tWBX \leq (w_1d_3)\, X^tX \leq (w_1d_3c_1)\, kI_p$ が成り立つ．このことと補助定理 2.10 の結果を併せると

$$d_4\, kI_p \;\leq\; U_{1w} \;\leq\; d_5\, kI_p \tag{2.19}$$

が成り立つ．(2.17), (2.19) により結局次が成り立つ.

$$\begin{aligned} ||\,\iota_k\,||^2 &= \iota^t\, V_w^{-1/2}U_{1w}^{-2}V_w^{-1/2}\,\iota \;\leq\; \iota^tV_w^{-1/2} \times d_4^{-2}k^{-2}I_p \times V_w^{-1/2}\iota \\ &= d_4^{-2}k^{-2}\left(\iota^t\, V_w^{-1}\,\iota\right) \;=\; d_4^{-2}k^{-2}\left(\iota^t\, U_{1w}U_{2w}^{-1}U_{1w}\,\iota\right) \\ &\leq d_4^{-2}d_1k^{-3}\left(\iota^t\, U_{1w}^2\,\iota\right) \;\leq\; d_4^{-2}d_1d_5^2 \times k^{-1}\,||\,\iota\,||^2 \\ &= d_4^{-2}d_1d_5^2 \times k^{-1} \end{aligned}$$

よって (2.18) の成立が示された.

(2.18) より $\delta\,(>2)$ について次が成り立つことが分かる.

$$\sum_{i=1}^{k} E\left(\left|\,n_i\iota_k^tX_i^tW_i\Omega_i^{-1}||\,\epsilon_i\,||^{-2}\epsilon_i\,\right|^{\delta}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{k} n_i^{\delta} \, || \, \iota_k \, ||^{\delta} \, || \, X_i^t W_i \Omega_i^{-1} \, ||^{\delta} \, E(|| \, \epsilon_i \, ||^{-\delta}) \\
&\le d_6 \times k^{1-(\delta/2)} \times \sup_{i \ge 1} E(|| \, f_i \, ||^{-\delta}) \\
&\le d_7 \times k^{1-(\delta/2)} \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

最後に，次が成り立つことが分かる．

$$
\begin{aligned}
V\left\{\iota_k^t \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta)\right\} &= \iota_k^t \, V\left\{\sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta)\right\} \iota_k = \iota^t \, V_w^{-1/2} U_{1w}^{-1} U_{2w} U_{1w}^{-1} V_w^{-1/2} \, \iota \\
&= \iota^t \, V_w^{-1/2} V_w V_w^{-1/2} \, \iota \; = \; \iota^t \iota \; = \; 1 \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

(2.20), (2.21) により，Lyapunov の定理の正則条件が満たされる．よって補助定理 2.11 の主張は成り立つ．

■

3．主要定理

定理 3.1 推定方程式 (2.2) の解 γ_k の漸近分布について次が成り立つ．

$$
V_w^{-1/2}(\gamma_k - \beta) \quad \xrightarrow{d} \quad N(0, I_p) \quad (k \to +\infty)
$$

証明 (2.4) より

$$
V_w^{-1/2}(\gamma_k - \beta) \;=\; V_w^{-1/2} U_{1w}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(\beta) \;+\; o_p(1) \quad (k \to +\infty)
$$

が成り立つこと，及び補助定理 2.11 の結果から Slutsky の定理の正則条件が満たされる．よって，$V_w^{-1/2}(\gamma_k - \beta)$ は平均 0，分散共分散行列 I_p の正規分布に漸近的に従う．

■

定理 3.1 により推定方程式 (2.2) の解 γ_k の漸近分散が得られたが，この方程式の中には重み行列 W_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が挿入されており，γ_k もそれに依存して定められることに注意しよう．

このように，W_i $(i=1,2,\ldots,k)$ が γ_k を生成するという意味で γ_k は β の推定量のクラスを構成する．次の定理では，そのクラスの中で漸近分散を最小にするものを摘示する．

定理 3.2 γ_k の漸近分散 V_w について次のことが言える．

(i) V_w の下限は

$$\begin{aligned} V_{opt} &= \left\{\sum_{i=1}^{k} X_i^t M_i\left(a_i(q_i-2\xi_i)^2,\, b_i(r_i-2\nu_i)^2\right)\Omega_i^{-1}X_i\right\}^{-1} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{k} E(\|\,\epsilon_i\,\|^{-2})\,X_i^t M_i\left(\frac{(q_i/\xi_i-2)^2}{q_i/\xi_i},\, \frac{(r_i/\nu_i-2)^2}{r_i/\nu_i}\right)X_i\right\}^{-1} \end{aligned}$$

で与えられ，この下限は

$$W \;=\; W_{opt} \;=\; \left[\,M_i\left(\frac{q_i-2\xi_i}{n_i},\, \frac{r_i-2\nu_i}{n_i}\right)\right] \tag{3.1}$$

の場合に達成される．

(ii) $V_{opt} \;\le\; \left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-s-2)^2}{n_i-s}E(\|\,\epsilon_i\,\|^{-2})\,X_i^tX_i\right\}^{-1}$ が成り立つ．

(iii) 無相関性の条件 $\Omega_i=I_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ の下で，W_{opt}，V_{opt} はそれぞれ次で与えられる．

$$W_{opt} \;=\; \left[\,\frac{n_i-2}{n_i}\,I_i\right] \tag{3.2}$$

$$V_{opt} \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-2)^2}{n_i}E(\|\,f_i\,\|^{-2})\,X_i^tX_i\right\}^{-1}$$

(i) の証明 $D=[\,D_i\,]=[\,B_iC_i^{-1}B_i\,]$，$G=[\,G_i\,]=[\,W_iC_iB_i^{-1}\,]$，$Z=[\,D_i^{1/2}\,]\,X$ によって行列 D, G, Z を定めると，

$$\begin{aligned} U_{1w} &= X^t[\,W_iB_i\,]\,X \;=\; X^t[\,G_iD_i\,]\,X \;=\; Z^tGZ, \\ U_{2w} &= X^t[\,W_iC_iW_i\,]\,X \;=\; X^t[\,G_iD_iG_i\,]\,X \;=\; Z^t[\,G_i^2\,]\,Z \;=\; Z^tG^2\,Z, \\ V_w &= U_{1w}^{-1}U_{2w}U_{1w}^{-1} \;=\; \left(X^tWBX\right)^{-1}\left(X^tWCWX\right)\left(X^tWBX\right)^{-1} \\ &= \left(Z^tGZ\right)^{-1}\left(Z^tG^2Z\right)\left(Z^tGZ\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と表せる．また，

$$\begin{aligned} D_i &= n_i\Omega_i^{-1} M_i\left(a_i(q_i-2\xi_i),\, b_i(r_i-2\nu_i)\right) \times\, n_i^{-2} M_i\left(a_i^{-1}\xi_i,\, b_i^{-1}\nu_i\right) \\ &\quad \times\, n_i\Omega_i^{-1} M_i\left(a_i(q_i-2\xi_i),\, b_i(r_i-2\nu_i)\right) \\ &= M_i\left(a_i(q_i-2\xi_i)^2,\, b_i(r_i-2\nu_i)^2\right)\Omega_i^{-1} \end{aligned}$$

であることにより，V_{opt} を次のように表せる．

$$V_{opt} \;=\; \left(X^tDX\right)^{-1} \;=\; \left(Z^tZ\right)^{-1} \tag{3.4}$$

ここで，

$$Z^tZ-\left(Z^tGZ\right)\left(Z^tG^2Z\right)^{-1}\left(Z^tGZ\right) = Z^t\left[I-(GZ)\left\{(GZ)^t(GZ)\right\}^{-1}(GZ)^t\right]Z$$

は非負値定符号である（但し，I は単位行列とする）．従って，(3.3)，(3.4) により $V_{opt}^{-1} \;\geq\; V_w^{-1}$，すなわち $V_w \;\geq\; V_{opt}$ が成り立つ．この不等式の等号が $W = W_{opt} = BC^{-1} = \left[\, n_i^{-1}M_i\left(q_i-2\xi_i,\, r_i-2\nu_i\right)\right]$ の場合に達成されるのは明らかである．

(ii) の証明　補助定理 2.9 (ii) により

$$\begin{aligned} &M_i\left(\, a_i(q_i-2\xi_i)^2,\; b_i(r_i-2\nu_i)^2\,\right)\Omega_i^{-1} \\ &\qquad = M_i\left(\, a_i(q_i-2\xi_i)^2\xi_i^{-1},\; b_i(r_i-2\nu_i)^2\nu_i^{-1}\,\right) \\ &\qquad \geq \frac{(n_i-s-2)^2}{n_i-s}\, E(||\,\epsilon_i\,||^{-2})\, I_i \qquad (i=1,2,\ldots,k) \end{aligned}$$

が成り立つことと，及び定理 3.2 (i) により直ちに結果を得る．

(iii) の証明　$a_i \;=\; b_i \;=\; E\left(f_{i1}^2||\,f_i\,||^{-4}\right) \;=\; n_i^{-1}E(||\,f_i\,||^{-2}),\; q_i \;=\; r_i \;=\; E(||\,f_i\,||^{-2})/\left\{n_i^{-1}E(||\,f_i\,||^{-2})\right\} = n_i\,,\, \xi_i = 1+(n_i-1)\times 0 = 1,\, \nu_i = 1-0 = 1$ $(i=1,2,\ldots,k)$ であるから，$W_{opt}\,,\, V_{opt}$ はそれぞれ次のように表される．

$$\begin{aligned} W_{opt} &= \left[\, n_i^{-1}M_i\left(n_i-2,\, n_i-2\right)\right] \;=\; \left[\,(n_i-2)n_i^{-1}\, I_i\,\right], \\ V_{opt} &= \left\{\sum_{i=1}^{k}(n_i-2)^2n_i^{-1}E(||\,f_i\,||^{-2})\, X_i^t\, M_i\left(\,1,\,1\,\right)\, I_i^{-1}X_i\right\}^{-1} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{k}(n_i-2)^2n_i^{-1}E(||\,f_i\,||^{-2})\, X_i^tX_i\right\}^{-1} \end{aligned}$$

∎

定理 3.2 の結果について，考察を加えておく．

式 (3.1)（あるいは，その特殊形である (3.2) ）で与えられる最適な重み行列 W_{opt} は，一般に $\sum_{i=1}^{k} n_i$ 次単位行列にはならないことに注意する．推定方程式 (2.2) で重み行列 W を単位行列に設定することは一見自然と思われる．しかし，その設定の下で導かれる解は一般に漸近最適ではない．

また，条件 2.6 と併せて考えれば分かるように，s の値が小さいと（すなわち，ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が 0 に近いと），(ii) における V_{opt} の上限は小さくなり，s の値が大きいと（ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の値の範囲が広いと），V_{opt} の上限は大きくなる．このことは，誤差項の相関の程度が小さいほど回帰ベクトル β の推定方程式 (2.2) の解 γ_k の精度が高くなることを示している．

参考文献

Inoue, K. (1999). Asymptotic improvement of the Graybill-Deal estimator. *Comm. Statist. Theory Methods* 28, No.2, pp.388–407.

Inoue, K. (2003). Iterative weighted least-squares estimates in a heteroscedastic linear regression model. *J. Statist. Plann. Inference* 110, 1-2, pp.133–146.

井上 (2005). 非正規性の下での共通平均母数の結合推定量について．教養諸学研究, 118, pp.183–194.

Neyman, J. and Scott, E. L. (1948). Consistent estimates based on partially consistent observations, *Econometrica*, 16, pp.1–32.

Shinozaki, N. (1978). A note on estimating the common mean of k normal distribution and Stein problem, *Commun. Statist.-Theory Methods* A7(15), pp.1421–1432.